

Transition de Fréedericksz

Elements de calcul

1 Introduction

Pour les champs électromagnétiques de basses fréquences, typiquement du continu jusqu'à quelques kHz, chaque molécule mésogène peut être considérée comme un dipôle élémentaire.

L'interaction de ce dipôle avec un champ électrique conduit à l'existence d'une énergie électro-magnétique volumique typiquement $\frac{1}{2}\epsilon E^2$ pour la partie électrique du champ et $\frac{1}{2}\mu H^2$ pour la partie magnétique.

Traisons la composante électrique de cette énergie. Dans le cas d'un milieu anisotrope uniaxe, celui des cristaux liquides nématiques, $\vec{D} = \bar{\epsilon}\vec{E}$. L'énergie s'écrivant toujours $f_{\text{elec}} = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$. Si l'on se place dans les axes propres du système ($E_z = \vec{E}\cdot\vec{n}$ est la projection du champ selon le vecteur directeur local du cristal liquide. La permittivité diélectrique "vue" par ce champ est ϵ^{\parallel} alors que celle "vue" par les composantes orthogonales (E_x, E_y) reste ϵ^{\perp} . Il vient alors :

$$\begin{aligned} f_{\text{elec}} &= \frac{1}{2}[\epsilon^{\perp} E_x^2 + \epsilon^{\perp} E_y^2 + \epsilon^{\parallel} E_z^2] \\ &= \frac{1}{2}[\epsilon^{\perp} E_x^2 + \epsilon^{\perp} E_y^2 + \epsilon^{\perp} E_z^2 - \epsilon^{\perp} E_z^2 + \epsilon^{\parallel} E_z^2] \\ &= \frac{1}{2}[\epsilon^{\perp} E^2 + (\epsilon^{\parallel} - \epsilon^{\perp}) E_z^2] \end{aligned} \quad (1)$$

Il s'agit là toujours d'une énergie potentielle, dans le cas d'un champ électrique uniforme le terme en E^2 ne dépend pas de l'espace et peut donc être ignoré.

Dans le cas d'une mésophase nématique, l'énergie volumique due à un champ \vec{E} uniforme pour un volume élémentaire de directeur \vec{n} est donnée par l'équation 2.

$$f_{\text{elec}} = -\frac{\Delta\epsilon}{2}[\vec{E}\cdot\vec{n}]^2 - \frac{\Delta\chi}{2}[\vec{H}\cdot\vec{n}]^2 \quad (2)$$

Les énergies volumiques sont fonctions de l'intensité du champ et de l'angle moyen des molécules avec ce champ. Dans le cas courant d'une anisotropie électrique positive, l'énergie sera donc minimale pour $\vec{E}\cdot\vec{n}$ maximum, les molécules tentent donc de s'aligner avec le champ.

Il est très important de noter que la dépendance quadratique de l'énergie avec le champ rend les mésophases sensibles à l'intensité et à la direction des champs qui leur sont appliqués mais pas au sens de ces champs. Cet aspect et généralement traduit par une dépendance dite en " E^2 " ou un effet Kerr dit "quadratique".

L'anisotropie électrique est calculée à partir des permittivités moléculaires respectivement parallèles à l'axe de la molécule et perpendiculaires ($\epsilon^{\parallel}, \epsilon^{\perp}$) au paragraphe ?? pour les fréquences optiques, un raisonnement analogue donne la valeur de l'anisotropie magnétique.

$$\begin{aligned}\Delta\chi &= NS(\xi^{\parallel} - \xi^{\perp}) \\ \Delta\epsilon &= NS(\epsilon^{\parallel} - \epsilon^{\perp})\end{aligned}\tag{3}$$

Dans la suite, seuls des champs électriques seront considérés. L'alignement de mésophases sous champ magnétique est également possible, refaire le calcul précédent dans le cas d'un champ magnétique constitue un excellent exercice.

2 Transition de Fréedericksz

Les paragraphes précédents montrent qu'une mésophase nématique peut être considérée comme un milieu continu pour autant qu'un directeur puisse être défini. Dans ce cas, l'énergie volumique se décompose en une contribution élastique d'une part et électro-magnétique d'autre part. Le paragraphe précédent montre très succinctement l'intérêt énergétique représenté par l'alignement des vecteurs directeurs avec le champ électrique éventuellement au détriment de l'énergie élastique. La configuration finale d'un système résultera du compromis énergétique entre ces deux effets antagonistes.

Le cas de l'alignement sous champ électrique de molécules mésogènes se rapporte à la transition dite de Fréedericksz et fait l'objet du présent paragraphe. Dans une géométrie simple, le raisonnement et les principales conclusions, relatives notamment aux tensions de commandes sont exposées et discutées.

La figure 1 décrit la géométrie du système. Les molécules mésogènes sont supposées fixes sur le bord de la cellule en $-d/2$ et en $d/2$. Le cristal liquide qui est supposé présenter ici une anisotropie diélectrique positive va tendre à s'aligner dans la direction du champ électrique \vec{E} . La déformation induite par le champ électrique va alors entraîner une augmentation de l'énergie élastique du système. La conformation la plus stable est recherchée sous la forme d'une fonction $\theta = \theta(x)$ qui minimise l'énergie libre totale.

Pour simplifier les calculs, l'hypothèse est faite que $K_{22} = K_{33} = K$. On notera que K s'exprime dans les unités d'une force. La géométrie du système n'entraînant que de la torsion ("Twist") et de la courbure ("Bend") pour le cristal liquide, l'énergie volumique liée à la déformation et l'énergie électrique sont données par l'équation 4.

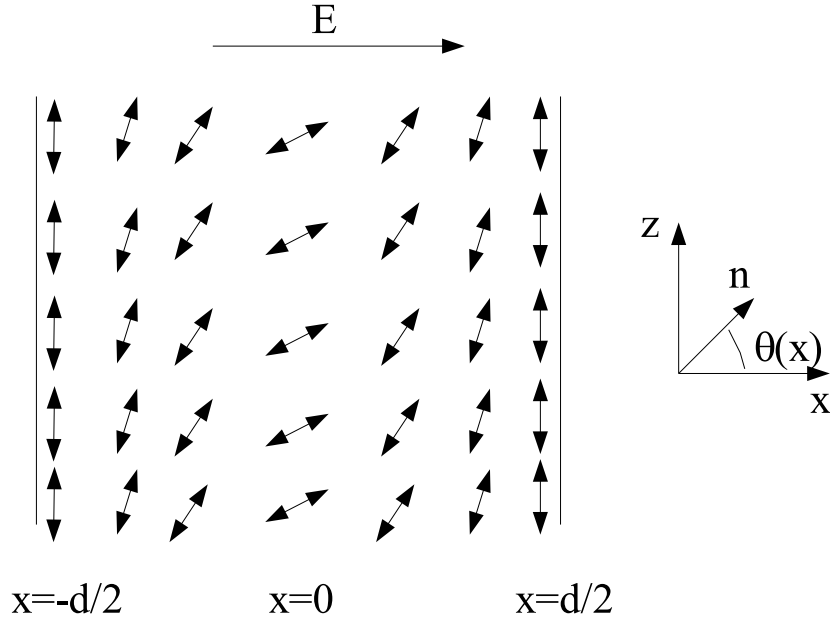


FIG. 1 – Géométrie de Fréedericksz.

$$\begin{aligned}
 f_E &= \frac{1}{2} (K_{11} \cdot 0 + K_{22} (\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{n})^2 + K_{33} (\vec{n} \times \text{rot } \vec{n})^2) = \frac{K}{2} \left[\frac{\partial \theta(x)}{\partial x} \right]^2 \\
 f_{\text{elec}} &= -\frac{\Delta \epsilon}{2} [\vec{E} \cdot \vec{n}]^2 = -\frac{\Delta \epsilon}{2} [E \sin \theta(x)]^2 \\
 f &= \frac{K}{2} \left[\frac{\partial \theta(x)}{\partial x} \right]^2 - \frac{\Delta \epsilon}{2} [E \cos \theta(x)]^2
 \end{aligned} \tag{4}$$

Toute fonction $\theta(x)$ qui minimise l'énergie libre totale $F = \int_{Vol} f(x) dx$ correspond à l'état du système sous champ. Dans ce cas, l'équation de Lagrange¹ permet de trouver $\theta(x)$ (Eq. 5).

$$\begin{aligned}
 \xi_E^2 &= \frac{K}{\Delta \epsilon E^2} \\
 0 &= \xi_E^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \cos \theta \sin \theta
 \end{aligned} \tag{5}$$

¹L'équation d'Euler Lagrange permet sous certaines conditions de minimiser $I[y(x)] = \int_a^b F(y, \frac{\partial y}{\partial x}, x) dx$. Dans ce cas $y(x)$ doit satisfaire l'équation $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial (\frac{dy}{dx})} = 0$

Les équations 5 et 6 sont équivalentes. La symétrie de la géométrie permet d'assurer que $d\theta/dx = 0$ en $x = 0$. Si θ_E correspond à l'angle des vecteurs directeurs en $x = 0$ alors l'équation 7 régit la variation spatiale de $\theta(x)$. Il convient de prendre garde lors de l'intégration que $\theta = \theta(x)$ sans quoid, un facteur 2 apparaît inopinément.

$$\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 = C - \frac{\cos^2 \theta}{\xi_E^2} \quad (6)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \pm \frac{1}{\xi_E} \sqrt{\cos^2 \theta_E - \cos^2 \theta} \quad (7)$$

En $x = \pm d/2$, $\theta = \pi/2$ et en $x = 0$, $\theta = \theta_E$. Une intégration (Eq. 7) permet de résoudre la structure géométrique du système (Eq. 8) qui prise en $x = 0$ donne une définition implicite de θ_E (Eq. 9).

$$\int_{-\frac{d}{2}}^x \frac{dx}{\xi_E} = \int_{\theta(x)}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta'}{\sqrt{\cos^2 \theta_E - \cos^2 \theta'}} \quad (8)$$

$$\frac{d}{2\xi_E} \cos \theta_E = \int_{\theta_E}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta'}{\sqrt{1 - \left(\frac{\cos \theta'}{\cos \theta_E}\right)^2}} \quad (9)$$

La valeur minimale de θ_E est nulle (dans ce cas les molécules sont alignées avec le champ \vec{E}), l'équation 9 possède toujours une solution triviale ($\theta(x) = 0\pi/2$ conduit à $0 = 0$). Pour $d/(2\xi_E) > \pi/2$ on peut montrer graphiquement qu'il existe une solution non triviale qui minimise également l'énergie libre. Dans ce cas la solution triviale devient instable et c'est l'orientation conduisant à $\theta_E \neq \frac{\pi}{2}$ qui est adoptée par le système. Il apparaît une valeur critique du champ électrique.

$$E_c = \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{K}{\Delta\epsilon}} \quad (10)$$

Une résolution numérique de (Eq. 9) est proposée sur la figure 2 et montre l'existence d'une géométrie non triviale d'alignement pour $E > E_c$. Dans ce cas la géométrie ($\theta(x)$) peut également être explicitée numériquement, trois exemples sont exposés sur la figure 3.

- $E < E_c$: Dans ce cas, la force d'orientation due au champ électrique reste trop faible devant la force de rappel due à l'élasticité du cristal liquide. Les molécules restent parallèles aux faces de la cellule. Si l'on considère que ξ_E est la longueur de la perturbation due à l'ancrage sur les faces de la cellule, celle-ci reste ici supérieure à l'épaisseur de la cellule et masque l'effet du champ électrique.
- $E > E_c$: Dans ce cas, la force électrique est suffisante pour compenser la force élastique et les molécules s'orientent dans la direction du champ². En d'autres termes, l'épaisseur de la perturbation ξ_E devient inférieure à l'épaisseur de la cellule et autorise le développement d'un régime fixé par le champ électrique.

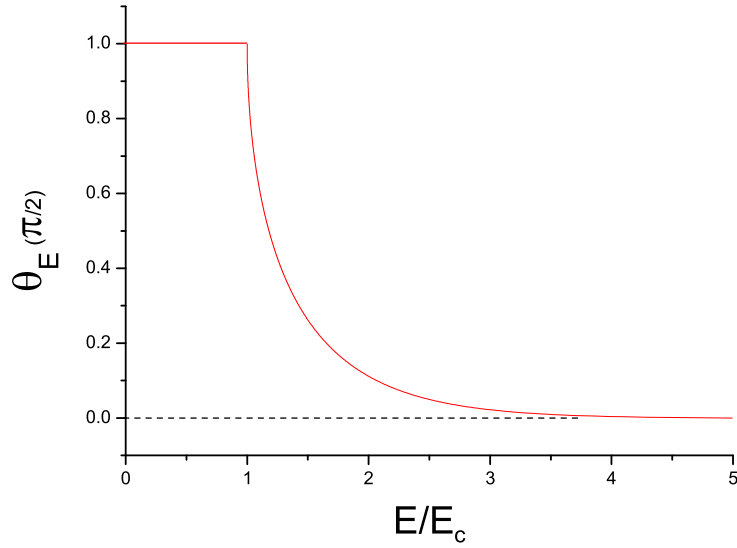


FIG. 2 – Champ critique E_c pour la transition de Fréedericksz.

La géométrie de répartition des vecteurs directeurs est fixée par l'angle θ_E en $x = 0$. Lorsque le champ appliqué est inférieur au champ critique E_c , les molécules restent alignées avec les parois $\theta(x) = \theta_E = \pi/2$. Lorsque le champ appliqué est supérieur à une valeur critique, les molécules s'orientent d'autant plus avec le champ électrique que celui-ci est important ce qui entraîne la décroissance de θ_E .

Il est intéressant de noter que dans le cas de cette géométrie assez simple mais représentative de nombreux dispositifs actuellement utilisés pour des systèmes d'affichage, la tension de commande $V_c = E_c * d$ est indépendante de l'épaisseur (d) de la cellule et reste de l'ordre de quelques Volts.

²L'orientation serait orthogonale dans le cas d'une anisotropie diélectrique négative du cristal liquide.

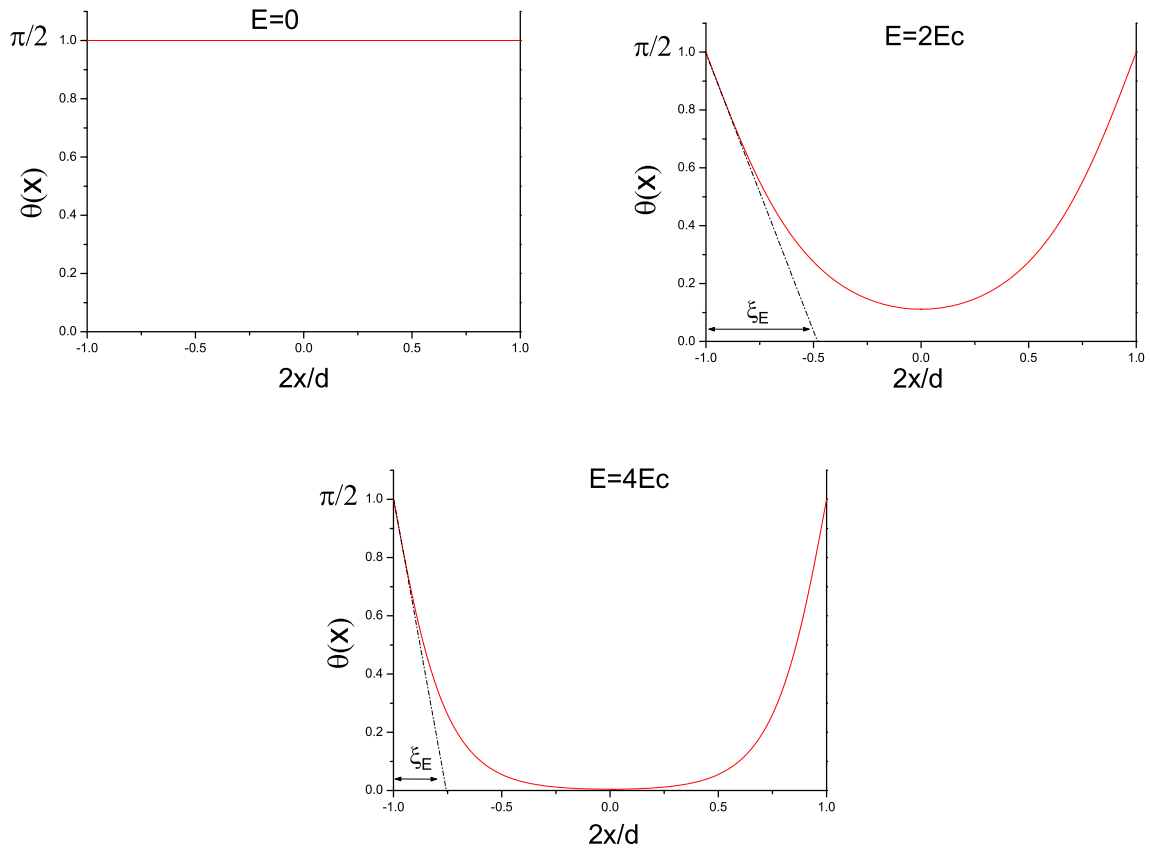


FIG. 3 – Alignement d'un cristal liquide sous champ électrique.

Lorsque le champ électrique est trop faible, les molécules ne s'alignent pas (a). Pour des champs croissants (b,c) la proportion de molécules alignées significativement par le champ augmente.

3 Annexes

Pour déterminer la condition 10, l'étude de la fonction L va être menée. Nous allons montrer que cette fonction qui n'est pas définie en 0 peut être facilement prolongée par continuité et qu'elle est même dérivable en 0.

$$L(\cos \theta_E) = \int_{\theta_E}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta'}{\sqrt{1 - \left(\frac{\cos \theta'}{\cos \theta_E}\right)^2}}$$

Pour $\theta_E \in [0.. \frac{\pi}{2}]$, on peut effectuer le changement de variable suivant :

$$x = \frac{\cos u}{\cos \theta_E}$$

$$du = -\frac{\cos \theta_E dx}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta_E x^2}}$$

d'où

$$L(\cos \theta_E) = \int_0^1 \frac{\cos \theta_E dx}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta_E x^2} \sqrt{1 - x^2}} \quad (11)$$

pour $x \in [0..1]$, il vient $0 \leq 1 - \cos^2 \theta_E x^2 \leq 1$, d'où

$$\begin{aligned} L(\cos \theta_E) &\geq \int_0^1 \frac{\cos \theta_E dx}{\sqrt{1 - x^2}} \\ &\geq \frac{\pi}{2} \cos \theta_E \end{aligned}$$

Notons :

$$g(u) = (1 + u^2)\sqrt{1 - u^2}$$

il vient

$$g'(u) = -\frac{u}{\sqrt{1 - u^2}}(1 - 3u^2)$$

	0	$\sqrt{3}/3$	1
$g'(u)$	+	0	-
$g(u)$	1	\nearrow	\searrow

Pour $u \in [0.. \sqrt{3}/3]$ il vient $1 + u^2 \geq \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}$. Pour $\cos \theta_E \in [0.. \sqrt{3}/3]$

$$\begin{aligned} L(\cos \theta_E) &\leq \int_0^1 \frac{\cos \theta_E (1 + \cos^2 \theta_E x^2) dx}{\sqrt{1 - x^2}} \\ &\leq \cos \theta_E \left(\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} + \cos \theta_E \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^2}} \right) \\ &\leq \cos \theta_E \left(\frac{\pi}{2} + \cos^2 \theta_E \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

pour $\cos \theta_E \in [0, \sqrt{3}/3]$ nous avons donc un encadrement pour $L(\cos \theta)$:

$$\frac{\pi}{2} \cos \theta_E \leq L(\cos \theta_E) \leq \frac{\pi}{2} \cos \theta_E \left[1 + \frac{\cos^2 \theta_E}{2} \right]$$

Le théorème des gendarmes permet de prolonger L par continuité et de calculer sa pente à l'origine.

$$L(\cos \theta_E) \xrightarrow{\cos \theta_E \rightarrow 0} 0$$
$$L'(\cos \theta_E)_{\cos \theta_E=0} = \lim_{\cos \theta_E \rightarrow 0} \frac{L(\cos \theta_E) - L(0)}{\cos \theta_E} = \frac{\pi}{2}$$